

**ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ**  
20-9-2016

1. (Μόρια 10) Για ποιες τιμές του  $a \in \mathbb{R}$  είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} -2 & a & 0 \\ a & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

αρνητικά ορισμένος;

2. (Μόρια 20) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Να υπολογιστεί ο πίνακας  $A^m$  για κάθε ακέραιο  $m \geq 1$ .

3. (Μόρια 30)

(α') Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$\langle, \rangle_1 : \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$$

με  $\langle A, B \rangle_1 = \text{Tr}(B^t A)$  είναι εσωτερικό γινόμενο στον πραγματικό διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Για αυτό το εσωτερικό γινόμενο υπολογίστε τα μήκη των

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

καθώς και το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας.

(β') Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$\langle, \rangle_2 : \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$$

με  $\langle A, B \rangle_2 = \text{Tr}(BA)$  δεν είναι εσωτερικό γινόμενο στον πραγματικό διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

4. (Μόρια 20) Εξετάστε αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

είναι διαγωνίσιμος και αν ναι, βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα  $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  και διαγώνιο πίνακα  $D \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  ώστε  $P^{-1}AP = D$ .

(Συνεχίζεται στην πίσω σελίδα.)

5. (Μόρια 20) Στον χώρο  $\mathbb{R}^4$  με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο δίνεται ο υπόχωρος
- $$V = \langle (5, 4, 3, 2), (1, 2, 3, 4), (0, 3, 4, 0) \rangle .$$

Βρείτε:

- (α') μία ορθοκανονική βάση του  $V$ .
- (β') την ορθογώνια προβολή του  $(2, 2, 2, 2)$  στον  $V$  και
- (γ') το ορθογώνιο συμπλήρωμα του  $V$ .

Καλή επιτυχία.